

## מתמטיקה

על פי תכנית הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון שני מ-5 יחידות לימוד

### הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.  
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,  
טריגונומטריה במרחב,  
מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה,  
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.  
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:  
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.  
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.  
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מן המשגיחים.  
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף



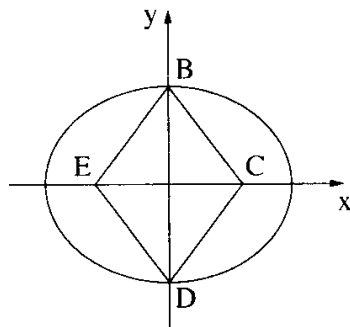
## השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

**פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,  
מספרים מרוכבים** ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה —  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1. נתון מעוין BCDE.

הקדקודים B ו-D נמצאים על ציר ה-y,

והקדקודים C ו-E נמצאים על ציר ה-x.

נתון: אורך צלע המעוין הוא 5,

אורך גובהו הוא 4.8,

ואורך האלכסון BD גדול מאורך האלכסון CE.

דרך הקדקודים B ו-D עוברת אליפסה קנונית (ראה ציור), שמוקדה הם הנקודות C ו-E.

א. (1) מצא את השיעורים של קדקודי המעוין.

(2) מצא את משוואת האליפסה.

פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$  חותכת את האליפסה ברביע הראשון בנקודה M.

נתון: שיעור ה-y של M הוא  $\sqrt{15}$ .

ב. הוכח שמוקד הפרבולה נמצא בנקודה C.

ג. דרך הנקודה E מעבירים ישר המקביל לציר ה-y.

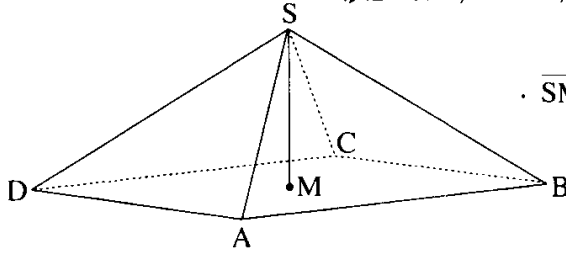
P היא נקודה על הפרבולה שמרחקה מהישר הזה הוא k.

מצא את היחס  $\frac{PC}{k}$ . הסבר.

◀ המשך בעמוד 3



2. נתונה פירמידה ישרה  $SABCD$ , שבסיסה,  $ABCD$ , הוא ריבוע.



$\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC}$  היא נקודה כך ש-

א. (1) הוכח:  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

(2) הוכח ש-  $\vec{SM}$  מאונך ל-  $\vec{AC}$ .

(3) נמק מדוע  $SM$  הוא גובה בפירמידה.

נתון:  $A(\sqrt{3}, 1, 0)$ ,  $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ , הנקודות  $B$  ו-  $D$  נמצאות במישור  $z = 0$

ונפח הפירמידה  $SABCD$  הוא 16.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודה  $M$ .

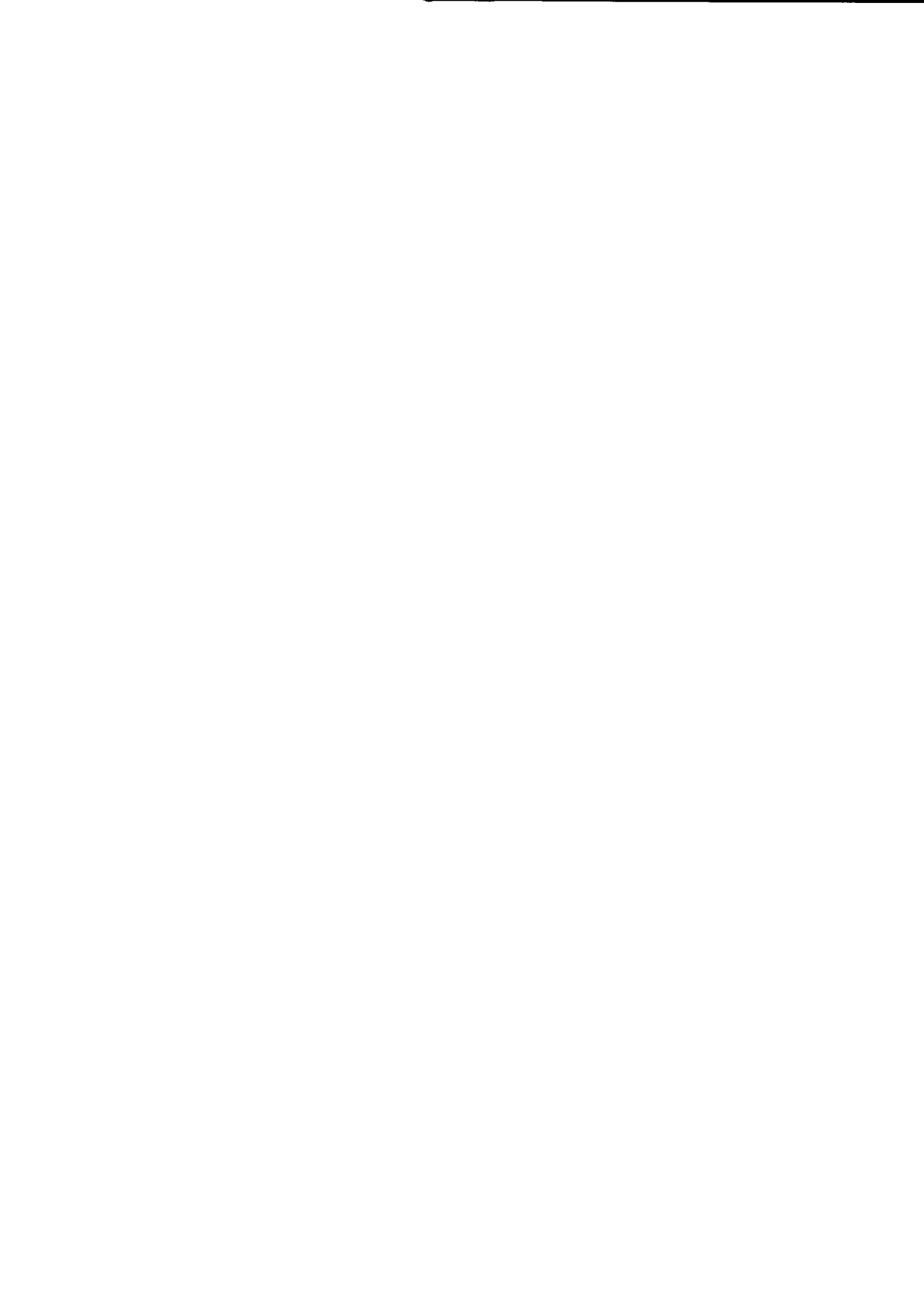
(2) מצא את שיעורי הקדקוד  $S$  (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן את הנקודות שמצאת בתת-סעיף ב(2) ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ .

ג. (1) מצא את משוואת המישור  $AS_1S_2$ .

(2) האם נקודה  $C$  נמצאת על המישור  $AS_1S_2$ ? נמק.

## ◀ המשך בעמוד 4



3. א. מצא את המספרים המרוכבים  $z$  המקיימים  $z^3 = -1$ .  
 נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב־  $z_1, z_2, z_3$ .  
 נתון כי  $z_2$  הוא ממשי.
- ב. (1) הראה ש־  $z_1, z_2, z_3$  הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.  
 (2)  $z_1, z_2, z_3$  הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית  $z_n$ .  
 מצא את  $z_5$ , האיבר החמישי בסדרה.
- ג. (1)  $z_{13}, z_{14}, z_{15}$  (האיברים ה־ 13, ה־ 14 וה־ 15 בסדרה  $z_n$  שמצאת בסעיף ב)  
 מיוצגים על ידי הנקודות A, B, C במישור גאוס, בהתאמה.  
 חשב את שטח המשולש ABC.
- (2) L, K, M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים  
 בסדרה  $z_n$ .
- הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת בתת־סעיף ג(1).

המשך בעמוד 5 ◀





## פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(33  $\frac{1}{3}$  נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

$$4. \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}}$$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.  
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
 (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

$$\text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

היעזר בתשובותיך על סעיף א וענה על סעיף ב.

- ב. (1) הסבר מדוע הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .  
 (2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , ומה סוגן? נמק את תשובתך.  
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .  
 (4) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $g(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).  
 נמק את תשובתך.  
 (5) הוסף לסרטוט של גרף הפונקציה  $f(x)$  סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

◀ המשך בעמוד 6



5. נתונה הפונקציה  $h(x) = \frac{x+3}{x}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של  $h(x)$ .  
 ב. מצא את התחום שבו  $h(x) > 0$ .

בתחום שבו  $h(x) > 0$  נתונה הפונקציה  $f(x)$  המקיימת:  $f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ .  
 נתון שגרף הפונקציה  $f(x)$  עובר דרך הנקודה  $(2, \ln 3)$ ,  
 וידוע שלפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית אחת.

- ג. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

### בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך



עֲפָרַת הַיָּם

מִשְׁכַּן אֱלֹהִים

פְּתוּחָה, 035582 : יְרֵמְיָהוּ

22/5/2017 פ.ק. : 381N

עֲפָרַת הַיָּם : מִשְׁכַּן אֱלֹהִים

פְּתוּחָה : מִשְׁכַּן אֱלֹהִים



22/5/2017

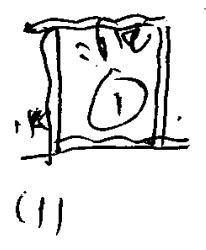
251W

23552

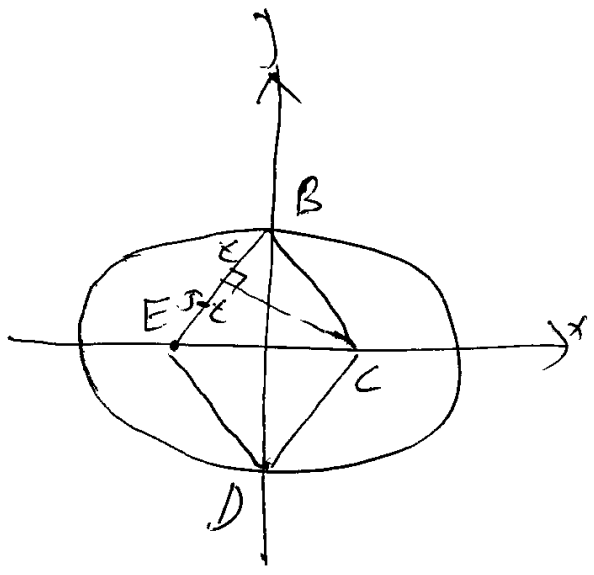
$$25 = 4.8^2 + t^2 \quad \Leftarrow$$

$$t^2 = 1.96$$

$$t = 1.4$$



$$5 - 1.4 = 3.6 \quad \Leftarrow$$



$$(2c)^2 = 4.8^2 + 3.6^2 \quad \Leftarrow$$

$$4c^2 = 36$$

$$c^2 = 9$$

$$c = 3$$

$$C(3,0) \quad \Leftarrow$$

$$E(-3,0)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$25 = b^2 + 9$$

$$16 = b^2$$

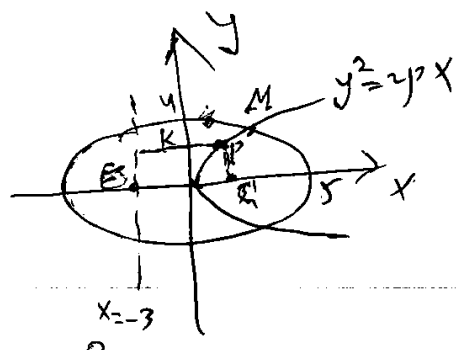
$$4 = b$$

$$B(0,4) \quad \Leftarrow$$

$$D(0,-4)$$

... (2)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$



$$\Rightarrow M(x_M, \sqrt{15})$$

$$\frac{x_M^2}{25} + \frac{15}{16} = 1$$

$$16x_M^2 + 375 = 400$$

$$16x_M^2 = 25 \Rightarrow x_M^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow x_M = \frac{5}{4}$$

$$E(-3,0)$$

(1)

(2)





ר (17,7 ABCD) (מח) פרק 2

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AS} + \vec{SM} \\ &= -\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{SC} \quad (1) \\ &= \frac{1}{2}\vec{SC} - \frac{1}{2}\vec{SA} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{SC} - \vec{SA}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned}$$

~~$$= \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SC}) = \vec{AM}$$~~

(2)   
 והנה נראה כי   
  $\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

הנה נראה כי  $M$  הוא נקודת האמצע של  $AC$

(3)   
  $\vec{SM}$  הוא נוקף  $AC$    
  $\vec{DB}$  הוא נוקף  $AC$    
  $\vec{SM}$  הוא נוקף  $DB$    
  $\vec{DB}$  הוא נוקף  $AC$

(3)   
  $\vec{SM}$  הוא נוקף  $DB$    
  $\vec{DB}$  הוא נוקף  $AC$

$\vec{SM}$  הוא נוקף  $DB$    
  $\vec{DB}$  הוא נוקף  $AC$    
  $\vec{SM}$  הוא נוקף  $DB$    
  $\vec{DB}$  הוא נוקף  $AC$    
 (3)

$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$    
  $\vec{SM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$    
  $\vec{AM} = \vec{SM}$    
  $M$  הוא נקודת האמצע של  $AC$

$$z_D = z_B = 0$$

מיר זען דאס דא B ! B

12

$$B(x_B, y_B, 0)$$

מיר

$$D(x_D, y_D, 0)$$

(1)

AC ווערט M

$$M = \left( \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + 1}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (0, 0, 0)$$

$$\frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot |\vec{SM}| = 16 \quad = 16 \text{ (צווייטע פארשטעלונג)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \times 8 \cdot |\vec{SM}| = 16$$

→

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{AD} \times \vec{DB}|$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} \right) \cdot 4 = 4$$

~~$|\vec{SM}| = 6$~~

~~$(0, 0, 0)$~~

~~$(0, -5) + (0, 5)$~~

~~$|\vec{SM}| = SM \cdot SM = (m-5) \cdot (m-5) = (m-5)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2$~~

~~$= 0 - 0 + 25$~~

~~$\sqrt{25} = |\vec{SM}| = 5$~~

$$8 \cdot |\vec{SM}| = 48$$

=

$$|\vec{SM}| = 6$$

(צווייטע פארשטעלונג) מיר M(0,0,0) און S(0,0,6)

מיר זען דאס דא S(0,0,6) און S(0,0,6) און S(0,0,6)

(4)

$$A(\sqrt{3}, 1, 0)$$

$$S_1(0, 0, 6)$$

$$S_2(0, 0, -6)$$

(1)

$$\vec{AS}_1 = (-\sqrt{3}, -1, 6)$$

$$\vec{AS}_2 = (-\sqrt{3}, -1, -6)$$

$$(a, b, c) \cdot (-\sqrt{3}, -1, 6) = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (-\sqrt{3}, -1, -6) = 0$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}a - b + 6c = 0 \\ -\sqrt{3}a - b - 6c = 0 \end{cases}$$

$$12c = 0$$

$$c = 0$$

$$-\sqrt{3}a - b = 0$$

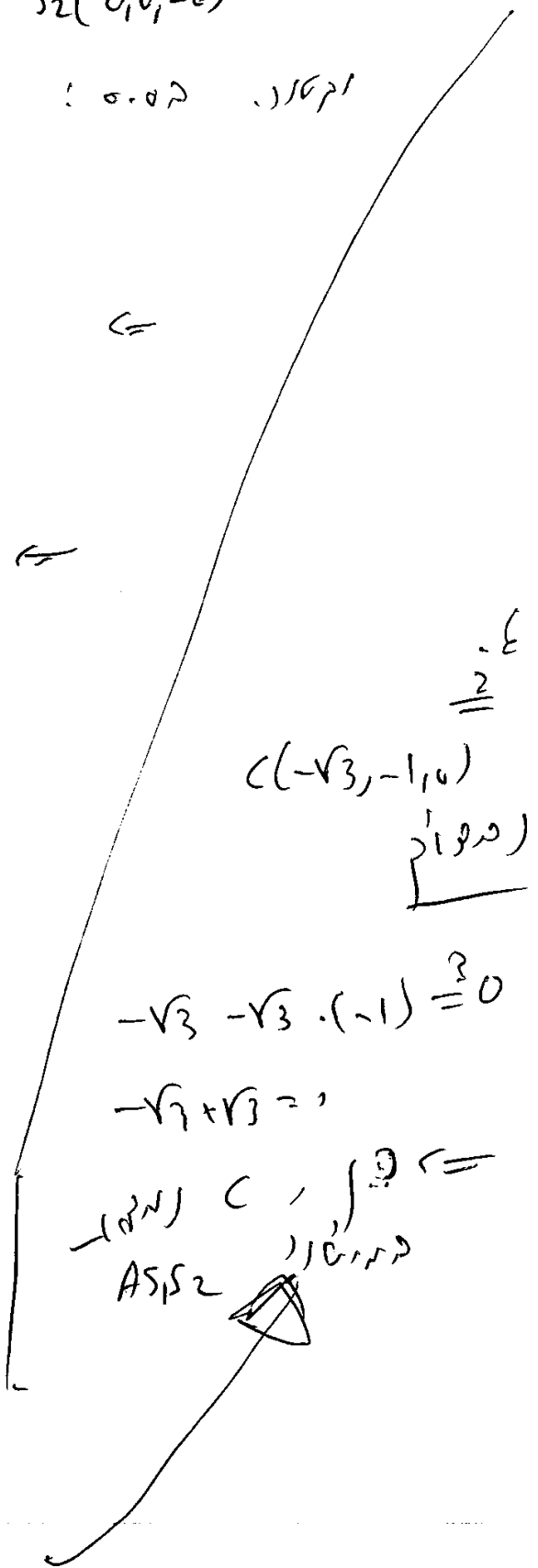
$$b = -\sqrt{3}a$$

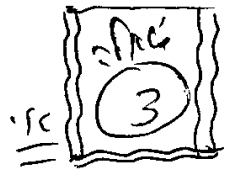
$$a = 1$$

(0, 0, 0) ...  
 ...  
 ...

$$-x + \sqrt{3}y = 0$$

$$x - \sqrt{3}y = 0$$





$$z^3 = -1$$

$$z = \sqrt[3]{-1}$$

$$-1 = -1 + 0i$$

$$\text{Arg}(-1) = 180^\circ \quad \Leftarrow$$

$$z_k = 1 \cdot \left[ \cos \frac{180+360k}{3} + i \sin \frac{180+360k}{3} \right]$$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \cos 60 + i \sin 60 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis } 60$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = \text{cis } 180 = -1$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = \text{cis } 300 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(1) <sup>(2)</sup>

$$z_1^2 = z_1 \cdot z_2$$

$$(-1)^2 \stackrel{?}{=} \text{cis } 60 \cdot \text{cis } 300$$

$$= \text{cis } 360 = \text{cis } 0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$1 = 1 \quad \Leftarrow$$

הקשר בין המספרים  $z_1, z_2, z_3$  הוא  $z_1 \cdot z_2 = z_3$

~~$z_1 \cdot z_2 = z_3$~~

(6)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} \quad \checkmark$$

$$z = \frac{z_3}{z_2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \text{cis}(300 - 180) = \text{cis}120 \quad (2)$$

$$z_5 = z_1 \cdot z^4$$

$$z_5 = \text{cis}60 \times (\text{cis}120)^4$$

$$z_5 = \text{cis}60 \times \text{cis}480$$

$$z_5 = \text{cis}540 = \text{cis}180 = -1$$

$$\frac{540 - 760}{180}$$

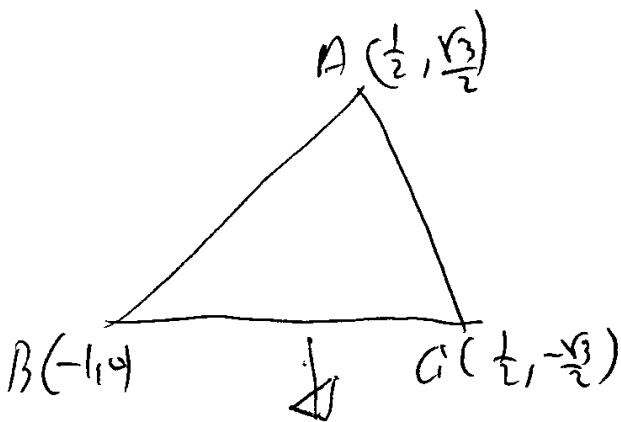
(1)  $\frac{z}{z}$

$$z_{13} = z_1 \cdot z^{12} = \text{cis}60 \cdot (\text{cis}120)^{12}$$

$$= \text{cis}60 \times \text{cis}1440 = \text{cis}60 \cdot \text{cis}0 = \text{cis}60 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_{14} = z_{13} \cdot z = \text{cis}60 \cdot \text{cis}120 = \text{cis}180 = -1$$

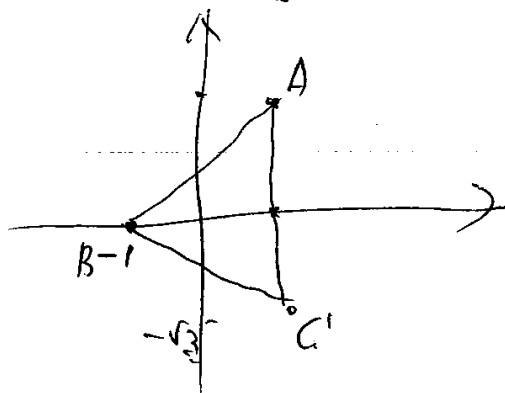
$$z_{15} = z_{14} \cdot z = \text{cis}180 \times \text{cis}120 = \text{cis}300 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B(-1, 0)$$

$$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$\Rightarrow \text{Area}_{ABC} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \checkmark$$

(7)

ABC channel from DKLM 26

→  $z_1$  is  $z = cis 120^\circ$  ; 26

PNM for  $z_1, z_2, z_3$  26

~~$z_3 = cis 120^\circ =$~~   
 $z_4 = z_1 z^3 = z_1 \cdot cis 360^\circ = z_1 \cdot cis 0^\circ = z_1$

$z_5 = z_4 \cdot cis 120^\circ = z_1 \cdot cis 120^\circ = z_2$

$z_6 = z_5 \cdot cis 120^\circ = z_2 \cdot cis 120^\circ = z_3$

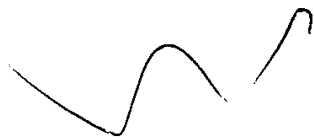
120

PNM  $z_1, z_2, z_3$  26

KLM 26

~~PNM~~ 26

ABC channel from DKLM 26



$$f(x) = \frac{e^x - 2x}{e^{x^2}}$$

4

$$f' = \frac{(2xe^{x^2} - 2)e^{x^2} - 2xe^{x^2}(e^{x^2} - 2x)}{e^{2x^2}} = 0 \quad \text{f.o.} \quad (1)$$

$$e^{x^2} [2xe^{x^2} - 2 - 2xe^{x^2} + 4x^2] = 0$$

$$4x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x$	$-1$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$
$f'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\max(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1.858)$$

$$\min(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.142)$$

$$x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ik} \quad x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ik} \quad (3)$$

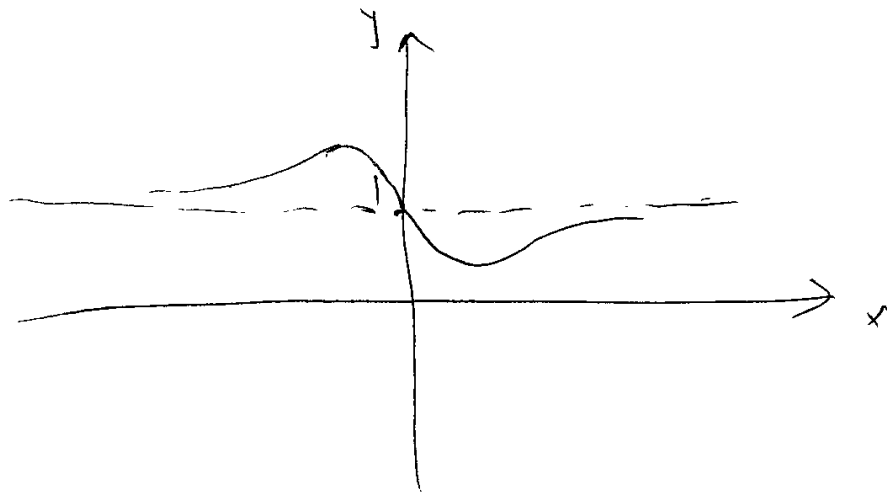
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ik}$$

$$\text{ik} \quad \text{ik} \quad \text{ik} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 2x}{e^{x^2}} = 1 - 0 = 1$$

$$y = 1$$

9



(5)

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$  10  
 $x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7$

$\max\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 7.031\right)$  (1)

$\min\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0.538\right)$  (2)

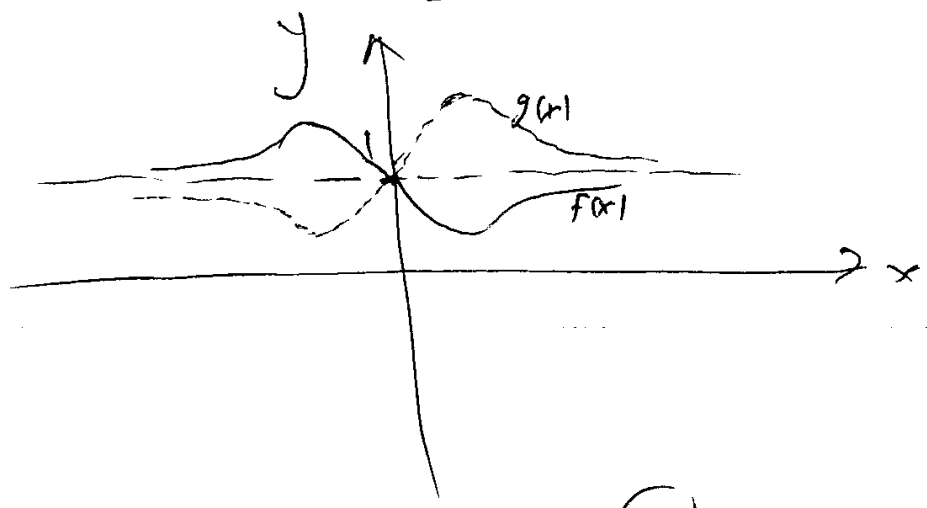
$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  (3)

$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  or  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq 0$  (4)  
 ...

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1$   
 $y = 1$

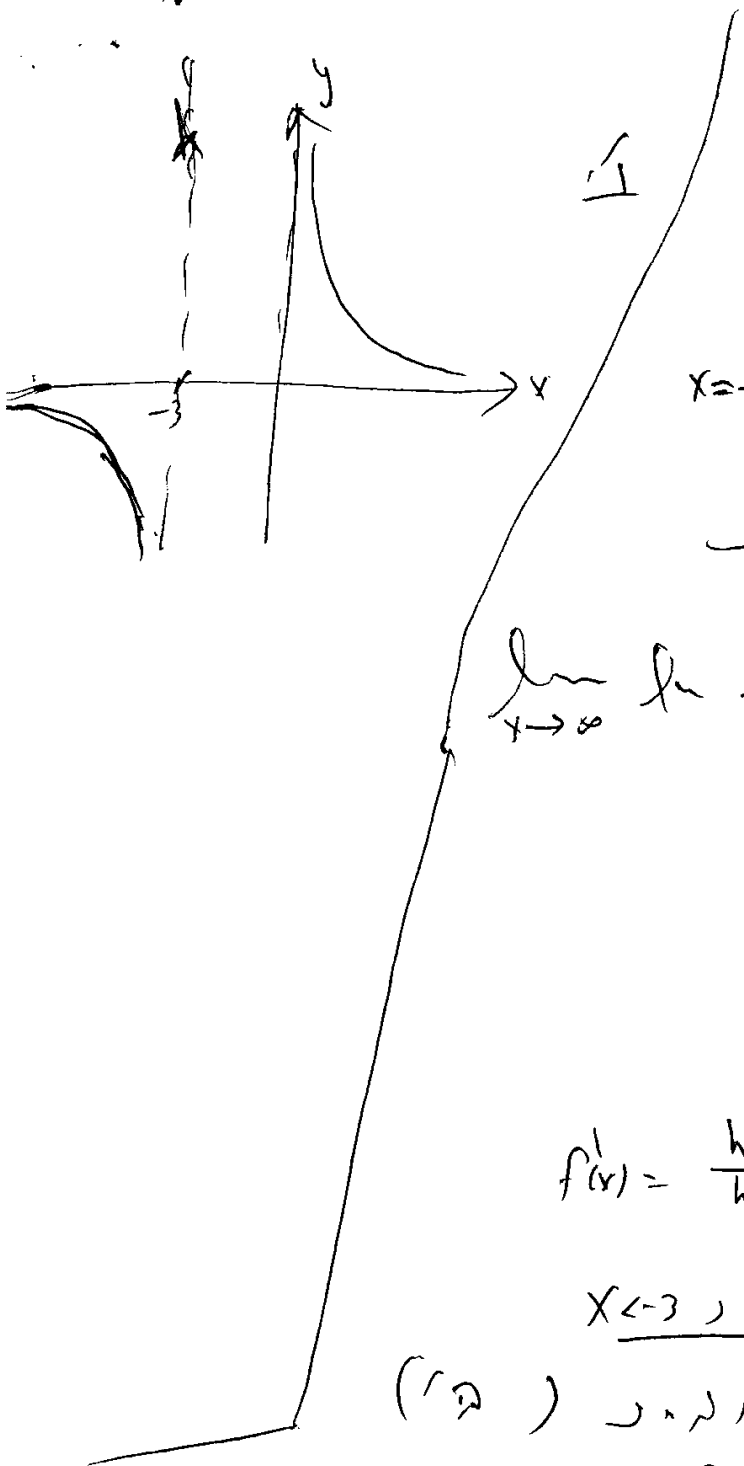
(5)



(10)







1.3) f(x) = (x+3)/x

$$x=0$$

$$x=-3 \iff \frac{x+3}{x} = 0$$

$$x=-3, x=0 \iff$$

אסימטות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 0$$

$$\boxed{y=0} \iff$$

$$h' = \frac{-3}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{h'}{h}$$

x < -3, x > 0 בממוקם

(רד) מוגד h

— חיבה h

x < -3, x > 0 בממוקם — חיבה f'(x) בקו

x < -3, x > 0 בממוקם f בקו

(x < -3, x > 0 בממוקם) אסימטות